ANDRZEJ KIEŁBASA

MATURA z MATEMATYKI

2023 2024

poziom
podstawowy i rozszerzony

CZĘŚĆ I

- wzory, twierdzenia, definicje, przykłady
- 269 zadań wprowadzających (175 z rozwiązaniami)
- 710 zadań maturalnych (130 zadań na dowodzenie)

SPIS TREŚCI

1. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI ALGEBRAICZNE ... 5

2. LICZBY RZECZYWISTE ... 13
Własności liczb całkowitych ... 18
Liczby rzeczywiste ... 20
Procenty ... 22

3. FUNKCJE ... 26
Różne sposoby określania funkcji ... 31
Zadania z kontekstem realistycznym ... 34
Przekształcenia wykresu funkcji ... 35
Zadania różne ... 36

4. FUNKCJA LINIOWA ... 37
Równania i nierówności liniowe ... 40
Równanie prostej ... 41
Układy równań liniowych ... 42
Funkcja liniowa ... 42
Zadania z kontekstem realistycznym ... 44
zadania prowadzące do równań i układów równań liniowych ... 44
funkcja liniowa ... 46

5. FUNKCJA KWADRATOWA ... 47
Własności funkcji kwadratowej ... 51
Równania i nierówności kwadratowe ... 54
wzory Viete'a ... 56
nierówności kwadratowe z parametrem ... 58
Zadania z kontekstem realistycznym ... 58
Zadania optymalizacyjne ... 59
Zadania różne ... 60

6. WIELOMIANY ... 63
Działania na wielomianach. Pierwiastek wielomianu ... 65
Wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych ... 67
Zadania różne ... 67

7. FUNKCJA WYKŁADNICZA ... 70
Działania na potęgach ... 72
Funkcja wykładnicza ... 73

8. FUNKCJA LOGARYTMICZNA ... 75
Logarytm ... 77
Funkcja logarytmiczna ... 78
Zadania z parametrem ... 80
Zadania różne ... 80

9. TRYGONOMETRIA ... 82
Związki między funkcjami trygonometrycznymi ... 87
Własności funkcji trygonometrycznych ... 89
Równania trygonometryczne ... 90
Parametr w funkcjach trygonometrycznych ... 92
Równania trygonometryczne z parametrem ... 92
Zadania różne ... 92

10. CIĄGI ... 94
Różne sposoby określania ciągu ... 99
Ciąg arytmetyczny ... 100
Ciąg geometryczny ... 104
Ciąg arytmetyczny + ciąg geometryczny ... 107
Szereg geometryczny ... 109
Zadania różne ... 110

11. POZIOM PODSTAWOWY - DODATEK ... 114

12. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA ... 119
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań wprowadzających ... 119
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań maturalnych ... 151

Niniejsza książka powstała po dokonaniu wnikliwej analizy tego, co w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki dla ucznia i nauczyciela jest najważniejsze, czyli *szczegółowych wymagań egzaminacyjnych* opublikowanych 25 lutego 2022 r. oraz *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla szkoły podstawowej.

Zbiór zadań wydany został w dwóch częściach. Rozdziały 1. – 10. zbioru składają się z trzech części:

1. **CZĘŚĆ TEORETYCZNA** zawiera niektóre definicje oraz wszystkie te wzory i twierdzenia, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań maturalnych. Niektóre definicje i twierdzenia zostały opatrzone przykładami.
2. **ZADANIA WPROWADZAJĄCE** to seria starannie dobranych prostych rachunkowo zadań, odnoszących się do poszczególnych *szczegółowych wymagań egzaminacyjnych.*

   Analiza tych zadań da uczniowi pewność, że nie pominął w przygotowaniach do matury żadnego zagadnienia, które może pojawić się na egzaminie maturalnym.

   Aby ułatwić maturzyście samodzielne przygotowanie do egzaminu, do większości *zadań wprowadzających* podano rozwiązania lub wskazówki.

   Poważne podejście do zadań z tej części rozdziału jest podstawą, a zarazem gwarancją sukcesu na egzaminie maturalnym.

   Dodatkowo na początku tej części rozdziału wymienione są te wymagania szczegółowe z podstawy programowej z danego działu, które **nie znalazły się** w wymaganiach egzaminacyjnych oraz te wymagania, które z poziomu podstawowego **zostały przeniesione** do poziomu rozszerzonego.
3. **ZADANIA MATURALNE** to zadania otwarte o zróżnicowanej skali trudności. Zadania otwarte to forma zadań, której maturzysta powinien poświęcić najwięcej uwagi. Przykłady innych zadań zamieszczono w rozdziale 11.
   Aby ułatwić korzystanie ze zbioru, ta część rozdziału została podzielona na podrozdziały i sekcje.

Cechą charakterystyczną zbioru jest taki układ zadań, który od ucznia rozwiązującego zadania z danego działu, nie wymaga znajomości zagadnień z działów następnych. Jest to duże udogodnienie, szczególnie dla tych maturzystów, którzy mają poważne braki w wymaganej wiedzy.

Mamy nadzieję, że pozycja ta zainteresuje również tych uczniów klas niematuralnych, którzy już myślą o egzaminie maturalnym z matematyki.

Część II książki składa się z rozdziałów:

1. *Planimetria*
2. *Geometria analityczna*
3. *Stereometria*
4. *Pochodna funkcji*
5. *Zadania optymalizacyjne*
6. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*
7. *Poziom podstawowy - dodatek*
8. *Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania*

PRZYJĘTE W KSIĄŻCE OZNACZENIA

Oznaczenia w części teoretycznej:

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca na obu poziomach

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca tylko na poziomie rozszerzonym

Oznaczenia szczegółowych wymagań egzaminacyjnych:

(P) – wymaganie szczegółowe zawarte w podstawie programowej dla szkoły podstawowej

(A) – wymaganie szczegółowe dodane przez autora

wymaganie szczegółowe bez oznaczeń – wymaganie zawarte w podstawie programowej dla liceum / technikum

Wymagania szczegółowe odnoszące się do poziomu rozszerzonego wyróżnione zostały **wytłuszczoną czcionką w kolorze czerwonym**.

Oznaczenia przy zadaniach:

W – do zadania podano wskazówkę

R – do zadania podano rozwiązanie

* – zadanie o podwyższonej skali trudności

Zadania i podpunkty zadań przeznaczonych dla zdających matematykę także na poziomie rozszerzonym wyróżnione zostały **kolorem czerwonym**.

NIEKTÓRE SYMBOLE (OZNACZENIA) MATEMATYCZNE

Symbol (oznaczenie)	Czytamy
$x \in A$	element x należy do zbioru A
$x \notin A$	element x nie należy do zbioru A
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \setminus B$	różnica zbiorów A i B
$(a; b)$	przedział otwarty o końcach a i b
$[a; b]$ lub $\langle a; b \rangle$	przedział domknięty o końcach a i b
$f: A \to B$	funkcja f ze zbioru A w zbiór B (*czyli funkcja, której dziedziną jest zbiór A, a wartości należą do zbioru B*)

6. WIELOMIANY

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW

- Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

RESZTA Z DZIELENIA WIELOMIANU PRZEZ DWUMIAN $x-a$

- Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $W(a)$.

PIERWIASTEK WIELOMIANU

- Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.
- Wielomian $W(x)$ stopnia n, który ma n pierwiastków: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, można zapisać w postaci $W(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n)$, gdzie a jest liczbą.

Np. jeżeli liczby -3, 1, 7 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=5x^3+bx^2+cx+d$, to wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci $W(x)=5(x+3)(x-1)(x-7)$.

TWIERDZENIE BÉZOUT

- Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

WYMIERNE PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

Niech $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ będą liczbami całkowitymi i $a_n \neq 0$.

- Jeśli równanie $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ ma pierwiastek **całkowity** c, to c jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.
- Jeśli równanie $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ ma pierwiastek **wymierny** $\frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Uczeń	• znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych • dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$

Powyższe wymagania szczegółowe z *podstawy programowej* dla **poziomu podstawowego** na maturze zdawanej w latach 2023 i 2024 **obowiązują tylko na poziomie rozszerzonym**.

Uczeń	• rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe

Powyższe wymaganie szczegółowe z *podstawy programowej* dla **poziomu podstawowego** na maturze zdawanej w latach 2023 i 2024 **nie obowiązuje na żadnym z poziomów**.

Maturzysta	• **rozpoznaje wielomian jednej zmiennej i określa jego stopień (A)**

6.1 Czy wyrażenie $W(x)$ jest wielomianem? Jeśli $W(x)$ jest wielomianem, to określ jego stopień.

a) $W(x)=3x-5$; **b)** $W(x)=\sqrt{3}$; **c)** $W(x)=\sqrt{x}$; **d)** $W(x)=10x^{10}+5x^5+1$; **e)** $W(x)=(\pi x+0{,}1)^5$;

f) $W(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)^3$; **g)** $W(x)=x^3\cdot(x+1)+x^2\cdot(1-x-x^2)$; **h)** $W(x)=(x^3+x+1)^{-1}$.

Maturzysta	• **rozpoznaje wielomiany równe (A)**

6.2 Rozstrzygnij, czy wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ są równe

a) **R** $P(x)=x^3-4x$, $Q(x)=x(x-2)(x+2)$;

b) $P(x)=x^4+x^2+1$, $Q(x)=x^4+x^3+1$;

c) $P(x)=x^3+2x(x^2+x-1)$, $Q(x)=3x^3+2x^2-2x$;

d) $P(x)=x^3+x^2-x-1$, $Q(x)=(x+1)(x-1)^2$.

6.3 **R** Znajdź współczynniki b, c, d wiedząc, że wielomiany $W(x)=x^3+bx^2+cx+d$ i $Q(x)=(x+2)^2(x+1)$ są równe.

6.4 Wyznacz parametry a, b, c tak, aby wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ były równe

a) $P(x)=2x^3+ax^2+5x+b+c$ i $Q(x)=(b-3)x^3+ax^2+(2a+c)x+4$;

b) $P(x)=ax^3-4x^2+5x-2$ i $Q(x)=(x-b)^2(x-c)$.

Maturzysta	• sprawdza, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu (A)

6.5 **R** Znajdź współczynnik a wielomianu $W(x)=ax^3-2x^2-8x-12$ wiedząc, że 3 jest jego pierwiastkiem.

6.6 **R** Liczby -2 i 1 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^4+x^3-x^2+dx+e$. Wyznacz wartości współczynników d i e.

Maturzysta	• **dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$** • **stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ (A)** • **stosuje twierdzenie Bézouta (A)**

6.7 Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$

a) $W(x)=x^2-10x+21$, $P(x)=x-7$;

b) $W(x)=x^3+4x^2-7x-10$, $P(x)=x-2$;

c) $W(x)=2x^3+4x^2-7x-10$, $P(x)=x+2$;

d) $W(x)=x^3-5x+4$, $P(x)=x+1$;

e) $W(x)=x^2+10x+21$, $P(x)=2x+1$;

f) $W(x)=2x^3+4x^2-7x-10$, $P(x)=-2x-3$.

6.8 Nie wykonując dzielenia, zbadaj, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, jeśli

a) **R** $W(x)=x^5-2x^4+x^3-3x^2+x+2$, $P(x)=x-2$;

b) $W(x)=x^{20}+x^{15}-2$, $P(x)=x+1$.

6.9 **R** Znajdź współczynnik b wiedząc, że wielomian $W(x)=x^3+bx^2+6x+4$ jest podzielny przez dwumian $x+2$.

6.10 **R** Znajdź wielomian $W(x)$, jeżeli

a) $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)=x-1$, a wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $P(x)=2x^2+3x+1$.

b) w wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=3x+5$ otrzymujemy iloraz $Q(x)=x^3+2x$ i resztę $R(x)=3$.

6.11 **R** Nie wykonując dzielenia, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli

a) $W(x)=x^6+2x^5+3x+4$ i $P(x)=x-1$;

b) $W(x)=x^6+3x^5+3x+4$ i $P(x)=x+3$.

6.12 Znajdź współczynnik c wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^4+2x^3+cx^2+7x+5$ przez wielomian $P(x)=x+1$ jest równa 5?

Maturzysta	• znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych

6.13 R Wielomian $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$, gdzie b, c, d są liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki wymierne. Podaj te pierwiastki.

6.14 R Wielomian $W(x) = 2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 5$, gdzie b, c, d są liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami całkowitymi ujemnymi. Podaj te pierwiastki.

6.15 R Wielomian $W(x) = 3x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$, gdzie b, c, d są liczbami całkowitymi, ma dwa różne dodatnie pierwiastki wymierne. Podaj te pierwiastki.

6.16 R Wielomian $W(x) = 4x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 15$, gdzie b, c, d są liczbami całkowitymi, ma wymierny pierwiastek należący do przedziału $(-3; -2)$. Podaj ten pierwiastek.

ZADANIA MATURALNE

DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH. PIERWIASTEK WIELOMIANU

306. Wielomian $W(x)$ jest sumą wielomianów
$P(x) = x^6 - x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x + 3$ i $Q(x) = -x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x - 11$.
a) Określ stopień wielomianów $P(x)$ i $W(x)$.
b) **R** Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$.

307. R Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + 10x^3 - 90x - 81$.
a) Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki liniowe.
b) Uzasadnij, że dla liczb większych od π wielomian $W(x)$ przyjmuje dodatnie wartości.

308. W Rozłóż na czynniki liniowe wielomian $W(x) = (x^2 + 4x - 1)^2 - 16$ i podaj jego pierwiastki.

309. R Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 - bx^2 - 3x + c$ jest 3. Znajdź pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ wiedząc, że $W(-2) = -5$.

310. R Jednym z rozwiązań równania $x^4 + 11x^2 + dx + 30 = 5x^3$ jest 3. Znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

311. R Wyznacz współczynniki wielomianu $P(x) = ax + b$ wiedząc, że iloczyn wielomianów $P(x)$ i $Q(x) = x^2 - 2x + 2$ jest wielomianem $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 8$.

312. **(0 – 2)** Wynikiem dzielenia wielomianu $5x^3 - 7x^2 - 4x - 4$ przez dwumian $x - 2$ jest trójmian kwadratowy postaci $ax^2 + bx + c$. Wyznacz wartości współczynników a, b oraz c.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2021

313. Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2007

314. Trójmian $T(x)$ jest wynikiem dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ przez dwumian $x - 2$. Zapisz $T(x)$ jako iloczyn dwóch wielomianów pierwszego stopnia.

315. Znajdź wszystkie wielomiany postaci $x - b$, przez które podzielny jest wielomian $W(x) = 9x^5 - 9x^4 - 4x + 4$.

316. Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 10$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$ i przez dwumian $x + 1$.
a) Znajdź współczynniki a i b.
b) Oblicz odwrotność sumy kwadratów wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$.

317. R Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ są liczbami całkowitymi. Znajdź współczynniki a i b wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - \sqrt{5}$.

318. R Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - p$ i przez dwumian $x - q$. Wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $x - p$ jest wielomian $P(x) = -x^2 + 10x - 16$, a dzieląc $W(x)$ przez $x - q$ otrzymamy wielomian $Q(x) = -x^2 + 52x - 100$. Oblicz $W(49)$.

319. R Dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - 2009$ otrzymamy iloraz $Q(x) = x^5 - 2010x^4 + 2000$ i resztę $R(x) = 2000$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 2010$.

320. **(0 – 4)** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa -30. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2022

321. W Wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - 11$, $x - 13$, $x - 15$, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 10$ jest równa 60. Oblicz $W(14)$.

322. **(0 – 5)** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 6x^3 + (m + 4)x^2 - 2x - 1$ przez dwumian $x - m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2014

323. **(0 – 6)** Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $x + 1$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2019

324. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 + 8x + 15)^{2009} + (x^2 + 6x + 5)^{2010}$.
a) Sprawdź, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x + 5$.
b) Uzasadnij, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ jest równa $4 \cdot 3^{2009}$.

325. R Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$, a wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $x + 1$ jest wielomian $Q(x)$. Natomiast dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - 2$ otrzymujemy iloraz $Q(x) + 6x - 3$ i resztę 3. Wyznacz wielomian $W(x)$.

WYMIERNE PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

326. W Wielomian $W(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + dx + 1$, gdzie $c, d \in \mathbf{Z}$, ma dwa różne pierwiastki wymierne. Znajdź niewymierne pierwiastki tego wielomianu.

327. R Liczby pierwsze p i q $(p \neq q)$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 10$, gdzie b, c są liczbami całkowitymi. Zapisz wielomian $W(x)$ jako iloczyn trzech wielomianów stopnia pierwszego.

328. Dwie ujemne liczby wymierne są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$, gdzie $b, c \in \mathbf{Z}$. Znajdź wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

329. R Dwie liczby wymierne należące do przedziału (1; 4) są zarówno pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 18$, jak i pierwiastkami wielomianu $V(x) = 4x^3 + dx^2 + ex + 27$, gdzie b, c, d, e są liczbami całkowitymi. Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$.

330. Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = px^3 - 7x^2 - 28x + q$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, jest liczba $-2{,}5$. Znajdź pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$.

ZADANIA RÓŻNE

331. R Znajdź te argumenty, dla których funkcje $f(x) = (x-5)(x^2+2x)$ i $g(x) = 3x - 15$ przyjmują tę samą wartość, a następnie podaj współrzędne punktów wspólnych wykresów obu funkcji.

332. Funkcja w określona jest wzorem $w(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$.
a) Znajdź współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji w i osi odciętych.
b) Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = w(x) - x^3$.

333. Punkt $A = (-\sqrt{6},\ 0)$ jest jednym z punktów wspólnych wykresu funkcji $w(x) = x^3 - 7x - \sqrt{6}$ i osi odciętych. Znajdź pozostałe punkty wspólne wykresu funkcji w i osi OX.

334. W Zbiór M jest zbiorem wartości funkcji $w(x) = 2x^4 + x^3 + 4x + 6$. Ustal, czy $4 \in M$.

335. W Wielomianu $W(x) = (x+1)^3 + 2\sqrt{2}$ rozłóż na czynniki stopnia co najwyżej drugiego i podaj jego pierwiastki.

336. Wielomian $x^4 + 4$ można rozłożyć na czynniki w następujący sposób:
- przedstawimy najpierw wyrażenie $x^4 + 4$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń. Aby to uzyskać, do wielomianu $x^4 + 4$ dodamy i odejmiemy wyrażenie $4x^2$: $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$;
- korzystając ze wzoru $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, otrzymujemy: $x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - (2x)^2$;
- korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, otrzymujemy rozkład danego wielomianu na czynniki: $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

a) Stosując przedstawioną metodę, rozłóż na czynniki drugiego stopnia wielomian $x^4 + 1$.
b) R Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^4 + 4$ jest liczbą pierwszą.

11. POZIOM PODSTAWOWY - DODATEK

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI ALGEBRAICZNE

676. Dodatnie liczby x i y spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika stąd, że wartość wyrażenia $\frac{x^2+y^2}{x \cdot y}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{13}{6}$ **C.** $\frac{6}{13}$ **D.** $\frac{3}{2}$

CKE, matura – poziom podstawowy, maj 2022

677. Dane jest równanie $x^{16} + 5x^{15} + x^2 + 6x + 5 = 0$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Nie istnieje liczba dodatnia, która jest pierwiastkiem danego równania.	**P**	**F**
2.	Liczba -5 jest rozwiązaniem danego równania.	**P**	**F**

678. Wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ dla $x = \sqrt{3} + 3$ jest równa

A. 1 **B.** 3 **C.** $1 + 2\sqrt{3}$ **D.** $1 - 2\sqrt{3}$

CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2020

679. Liczby $p = 3 - 2\sqrt{2}$ i $q = 3 + 2\sqrt{2}$ są rozwiązaniami równania $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 30x + 5 = 0$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	$p^4 - 6p^3 + 6p^2 - 30p + 5 = 0$.	**P**	**F**
2.	$q^4 - 6q^3 + 6q^2 - 30q + 5 > 0$.	**P**	**F**

LICZBY RZECZYWISTE

680. Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru **R** liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.
Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$ **B.** $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **C.** $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0{,}3$ **D.** $a = 6$

E. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$ **F.** $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$ **G.** $a = -\sqrt{6}$

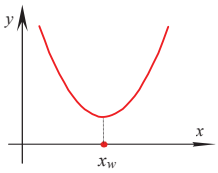
CKE, Informator o egzaminie maturalnym z matematyki (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2022/2023

681. **Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.**
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(n + 2025)(n + 2026)(n + 2027)$ jest podzielna

A.	przez 4,	ponieważ wśród liczb $n + 2025$, $n + 2026$, $n + 2027$	**1.**	jest liczba podzielna przez 4.
			2.	jest liczba podzielna przez 2 i jest liczba podzielna przez 3.
B.	przez 6,		**3.**	jest liczba podzielna przez 6.

5.13 $b=-6$.

Rozwiązanie. Ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f są skierowane do góry, więc funkcja ta jest malejąca w przedziale $(-\infty;\ x_w]$ i rosnąca w przedziale $[x_w;\ +\infty)$, gdzie x_w jest odciętą wierzchołka tej paraboli. Zatem $x_w=3$. Korzystając ze wzoru na odciętą wierzchołka paraboli otrzymujemy równość $-\frac{b}{2\cdot 1}=3$. Stąd dostajemy $b=-6$.



Rys. pomocniczy

5.14 Dla $m\in(-\infty;\ 0)$ – brak rozwiązań, dla $m\in(4;\ +\infty)\cup\{0\}$ – dwa rozwiązania, dla $m=4$ – trzy rozwiązania, dla $m\in(0;\ 4)$ – cztery rozwiązania.

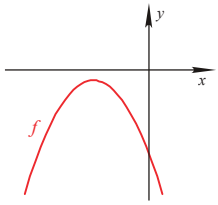
Wskazówka. Aby otrzymać wykres funkcji f, szkicujemy wykres funkcji $g(x)=x^2-4$, a następnie tę część wykresu funkcji g, która jest pod osią OX, odbijamy względem osi OX.

5.15 **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{dla } x\ge 4 \\ -(x^2-4x) & \text{dla } x<4 \end{cases}$; **c)** $f(x)=\begin{cases} x^2+3x-4 & \text{dla } x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle 2;+\infty) \\ -x^2+3x+4 & \text{dla } x\in(-2;2) \end{cases}$.

Wskazówka. a) Łatwo zauważyć, że funkcja f dla przeciwnych argumentów przyjmuje tę samą wartość. Zatem jej wykres jest symetryczny względem osi OX. Wystarczy więc naszkicować wykres funkcji f dla $x\ge 0$ (wtedy funkcja określona jest wzorem $f(x)=x^2-3x+2$) i otrzymany wykres odbić symetrycznie względem osi OX.

5.16 **a)** $m\in(-4;\ 0]$; **b)** $m=-4$.

Rozwiązanie. a) I. Jeśli $m=0$, to f jest funkcją stałą $f(x)=-1$. Wówczas f przyjmuje tylko ujemne wartości, więc $m=0$ jest jedną z szukanych wartości parametru m.
II. Jeśli $m\ne 0$, to ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f muszą być skierowane do dołu i f nie może mieć miejsc zerowych (*patrz rysunek pomocniczy*). Zatem $m<0$ i $\Delta=m^2+4m<0$. Stąd $m\in(-4;\ 0)$.
Ostatecznie: $m=0$ lub $m\in(-4;\ 0)$, czyli $m\in(-4;\ 0]$.
b) f musi być funkcją kwadratową, ramiona paraboli będącej jej wykresem muszą być skierowane do dołu i f musi mieć jedno miejsce zerowe (*wykonaj rysunek pomocniczy*). Zatem $m<0$ i $\Delta=m^2+4m=0$. Stąd $m=-4$.



Rys. pomocniczy

5.17 **a)** $p\in(-\infty;\ 2)$; **b)** $p\in(3;\ 4)$.

Rozwiązanie. a) Parabola, która jest wykresem funkcji f, musi mieć ramiona skierowane do dołu i f nie może mieć miejsc zerowych (*wykonaj rysunek pomocniczy*). Zatem $p-3<0$ i $\Delta=4+4(p-3)<0$. Stąd $p\in(-\infty;\ 2)$. **b)** Funkcja kwadratowa osiąga wartość najmniejszą wtedy, gdy parabola, która jest wykresem funkcji f, ma ramiona skierowane do góry. Wartość najmniejsza jest równa rzędnej wierzchołka tej paraboli. Zatem $p-3>0$ i $y_W=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+4(p-3)}{4(p-3)}<-2$. Stąd $p\in(3;\ 4)$.

5.18 $k\in(-\infty;\ -12)$.

Rozwiązanie. Ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f są skierowane do góry, więc wystarczy, aby dla argumentu 2 funkcja f przyjmowała wartość ujemną (*wykonaj rysunek pomocniczy*). $f(2)<0 \iff k<-12$.

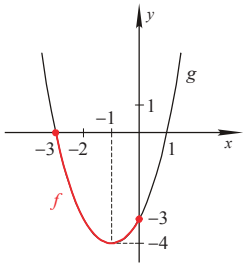
5.19 $m\in(-6{,}5;\ -6)$.

Rozwiązanie. I SPOSÓB. Funkcja f musi mieć dwa miejsca zerowe, wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f musi być położony „na prawo" od 2 i parabola ta musi przechodzić „nad" 2 (*wykonaj rysunek pomocniczy*).
Zatem: $(\Delta>0 \wedge x_W>2 \wedge f(2)>0) \iff [m\in(-\infty;\ -6)\cup(6;\ +\infty) \wedge m<-4 \wedge m>-6{,}5] \iff m\in(-6{,}5;\ -6)$.

II SPOSÓB. $(\Delta>0 \wedge x_1>2 \wedge x_2>2) \iff (\Delta>0 \wedge x_1-2>0 \wedge x_2-2>0)$. Liczby x_1-2 i x_2-2 są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn i ich suma są dodatnie. $(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$, $(x_1-2)+(x_2-2)=x_1+x_2-4$. Korzystając ze wzorów Viete'a, otrzymujemy $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=2m+13$, $x_1+x_2-4=-m+4$.
Zatem $m\in(-\infty;\ -6)\cup(6;\ +\infty)$ i $2m+13>0$ i $-m+4>0$. Stąd $m\in(-6{,}5;\ -6)$.

5.20 $[-4;\ 0]$.

Rozwiązanie. Naszkicujemy najpierw wykres funkcji $g(x)=x^2+2x-3$ określonej w zbiorze liczb rzeczywistych. Wykresem funkcji f jest część wykresu funkcji g – zbiór tych punktów wykresu funkcji g, których odcięta x należy do przedziału $[-3;\ 0]$ (patrz rys. 1/5).
Miejsca zerowe funkcji g: $x_1=-3$, $x_1=1$. Punkt wspólny wykresu funkcji g i osi OY: $f(0)=-3$, więc punktem tym jest $P=(0,\ -3)$. Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji g: $x_W=-1$, $y_W=-4$.
Korzystając ze wcześniej wykonanych obliczeń lub z wykresu funkcji f, stwierdzamy, że zbiorem wartości funkcji g jest przedział $[-4;\ 0]$.



Rys. 1/5

275. $P=(0, 25)$.

Rozwiązanie. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe, więc $\Delta=b^2-4c=0$. Do wykresu funkcji f należy punkt $A=(4, 1)$, więc $16+4b+c=1$.

Rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} b^2-4c=0 \\ c=-4b-15 \end{cases}$ są pary liczb $(b, c)=(-10, 25)$ i $(b, c)=(-6, 9)$.

Zatem funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2-10x+25$ lub wzorem $f(x)=x^2-6x+9$.
Punkt $B=(1, 4)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=x^2-6x+9$ $(f(1)=1-6+9=4)$ i nie należy do wykresu funkcji $f(x)=x^2-10x+25$ $(f(1)=16)$, więc funkcja f dana jest wzorem $f(x)=x^2-10x+25$.
$f(0)=25$, zatem punktem przecięcia wykresu funkcji f z osią OY jest punkt $P=(0, 25)$.

276. $a=1$, $b=3$.

277. $x=2{,}25$.

Rozwiązanie. Szukamy, tych liczb a, dla których 2 jest miejscem zerowym funkcji f, czyli liczb spełniających równanie $(a+2)\cdot 4+(a^2+4a+5)\cdot 2+4a+6=0$. Równanie to sprowadzamy do postaci $2a^2+16a+24=0$, a po podzieleniu oby stron równania przez 2, do postaci $a^2+8a+12=0$. Rozwiązaniami równania $a^2+8a+12=0$ są liczby -6 i -2, mniejszą z nich jest -6. Gdy $a=-6$, to funkcja f ma postać $f(x)=-4x^2+17x-18$. Miejscami zerowymi funkcji $f(x)=-4x^2+17x-18$ są liczby 2 i 2,25, więc drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2,25.

278. $a=-4-\sqrt{3}$ lub $a=-4+\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Funkcja f największą wartość przyjmuje dla argumentu 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $a+2<0$ i $x_W=-\dfrac{a^2+4a+5}{2(a+2)}=2$. Mnożąc obie strony równania $-\dfrac{a^2+4a+5}{2(a+2)}=2$ przez $-2(a+2)$, otrzymujemy równanie kwadratowe $a^2+4a+5=-4a-8$. Rozwiązaniami tego równania są liczby $a=-4-\sqrt{3}$ i $a=-4+\sqrt{3}$ (obie spełniają nierówność $a<-2$).

279. $a=-4$.

Rozwiązanie. Wartość funkcji f przyjmowana dla argumentu 2 jest równa $(a+2)\cdot 4+(a^2+4a+5)\cdot 2+4a+6=2a^2+16a+24$.
Wyrażenie $2a^2+16a+24$ możemy potraktować jako funkcję zmiennej a. Funkcja $g(a)=2a^2+16a+24$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $a_W=-\dfrac{16}{2\cdot 2}=-4$. Zatem szukaną liczbą jest $a=-4$.

280. $n=3$ lub $n=6$.

Wskazówka. Trójmian $n^2-9n+20$ rozłóż na czynniki.

281. $m=1$.

Wskazówka. Wykorzystaj jeden ze wzorów Viete'a.

282. $m\in(-3; -2)\cup\{2\}$.

Wskazówka. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=|x^2-6x+5|-2$, a następnie rozważ równanie $f(x)=-m$.

283. Gdy $m<0$ lub $m>8$, to równanie nie ma rozwiązań w przedziale $[-2; 2]$, gdy $m\in(1; 8]$ – równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $m\in\{0, 1\}$ – równanie ma 2 rozwiązania, gdy $m\in(0; 1)$ – równanie ma trzy rozwiązania.

284. $m=0$.

285. $k\in\langle 3\frac{1}{2}; 4)$.

286. Dziedzina: $(\frac{2}{3}; 2)$; $f(m)=-m^2+4m-2$.

287. $x=2{,}5$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: p, q – miejsca zerowe funkcji $g(x)=ax^2+bx+c$, $s=p+q$.

Oś symetrii wykresu funkcji g ma równanie $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{b}{a})=\dfrac{1}{2}(p+q)=\dfrac{1}{2}s$.

$p^3+q^3=(p+q)(p^2-pq+q^2)=(p+q)[(p+q)^2-3pq]=s(s^2-6)=95$. Jedynym rozwiązaniem równania $s^3-6s-95=0$ jest 5, więc szukana prosta ma równanie $x=2{,}5$.