ANDRZEJ KIEŁBASA
PIOTR ŁUKASIEWICZ

MATURA Z MATEMATYKI

2023 2024

poziom
podstawowy i rozszerzony

CZĘŚĆ II

- wzory, twierdzenia, definicje, przykłady
- 195 zadań wprowadzających (145 z rozwiązaniami)
- 725 zadań maturalnych (95 zadań na dowodzenie)

SPIS TREŚCI

1. PLANIMETRIA ... 5
Trójkąty ... 16
Równoległoboki ... 22
Trapezy ... 24
Okrąg, koło ... 28
Inne czworokąty ... 31
Zadania z kontekstem realistycznym ... 33
Zadania różne ... 35

2. GEOMETRIA ANALITYCZNA ... 38
Prosta ... 42
Okrąg, koło ... 44
Trójkąt ... 46
Równoległoboki ... 49
prostokąt ... 49
romb ... 50
inne równoległoboki ... 51
Trapezy ... 51
Zbiory punktów o danej własności ... 52

3. STEREOMETRIA ... 53
Graniastosłupy ... 58
graniastosłupy prawidłowe ... 58
inne graniastosłupy ... 59
Ostrosłupy ... 60
ostrosłupy prawidłowe czworokątne ... 60
ostrosłupy prawidłowe trójkątne ... 61
inne ostrosłupy ... 62
Przekroje wielościanów ... 65
przekroje graniastosłupów ... 65
przekroje ostrosłupów prawidłowych czworokątnych ... 66
przekroje ostrosłupów prawidłowych trójkątnych ... 67

4. POCHODNA FUNKCJI ... 68
Granica i pochodna funkcji ... 71
Styczna do wykresu funkcji ... 71
Monotoniczność funkcji ... 73
Ekstrema funkcji ... 74
Zadania różne ... 75

5. ZADANIA OPTYMALIZACYJNE ... 76
Planimetria ... 77
Geometria analityczna ... 79
Stereometria ... 81
graniastosłupy ... 81
ostrosłupy ... 81
Zadania inne ... 82

6. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA. STATYSTYKA ... 84
Kombinatoryka ... 91
silnia, symbol Newtona ... 91
zadania kombinatoryczne ... 92
Rachunek prawdopodobieństwa ... 96
zadania z danym prawdopodobieństwem ... 102
zadania z funkcjami ... 103
zadania z ciągami ... 104
zadania z figurami geometrycznymi ... 104
prawdopodobieństwo warunkowe ... 105
twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym ... 106
schemat Bernoulliego ... 107
własności prawdopodobieństwa ... 108
Elementy statystyki opisowej ... 109
Zadania różne ... 111

7. POZIOM PODSTAWOWY - DODATEK ... 114

8. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA ... 117
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań wprowadzających ... 117
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań maturalnych ... 143

Niniejsza książka powstała po dokonaniu wnikliwej analizy tego, co w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki dla ucznia i nauczyciela jest najważniejsze, czyli *szczegółowych wymagań egzaminacyjnych* opublikowanych 25 lutego 2022 r. oraz *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla szkoły podstawowej.

Zbiór zadań wydany został w dwóch tomach. Rozdziały 1. – 6. tego tomu składają się z trzech części:

1. **CZĘŚĆ TEORETYCZNA** zawiera niektóre definicje oraz wszystkie te wzory i twierdzenia, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań maturalnych. Niektóre definicje i twierdzenia zostały opatrzone przykładami.
2. **ZADANIA WPROWADZAJĄCE** to seria starannie dobranych prostych rachunkowo zadań, odnoszących się do poszczególnych *szczegółowych wymagań egzaminacyjnych.*
   Analiza tych zadań da uczniowi pewność, że nie pominął w przygotowaniach do matury żadnego zagadnienia, które może pojawić się na egzaminie maturalnym.
   Aby ułatwić maturzyście samodzielne przygotowanie do egzaminu, do większości *zadań wprowadzających* podano rozwiązania lub wskazówki.
   Poważne podejście do zadań z tej części rozdziału jest podstawą, a zarazem gwarancją sukcesu na egzaminie maturalnym.

   Dodatkowo na początku tej części rozdziału wymienione są te wymagania szczegółowe z podstawy programowej z danego działu, które **nie znalazły się** w wymaganiach egzaminacyjnych oraz te wymagania, które z poziomu podstawowego **zostały przeniesione** do poziomu rozszerzonego.
3. **ZADANIA MATURALNE** to zadania otwarte o zróżnicowanej skali trudności. Zadania otwarte to forma zadań, której maturzysta powinien poświęcić najwięcej uwagi. Przykłady innych zadań zamieszczono w rozdziale 11.
   Aby ułatwić korzystanie ze zbioru, ta część rozdziału została podzielona na podrozdziały i sekcje.

Cechą charakterystyczną zbioru jest taki układ zadań, który od ucznia rozwiązującego zadania z danego działu nie wymaga znajomości zagadnień z działów następnych. Jest to duże udogodnienie, szczególnie dla tych maturzystów, którzy mają poważne braki w wymaganej wiedzy.

Mamy nadzieję, że pozycja ta zainteresuje również tych uczniów klas niematuralnych, którzy już myślą o egzaminie maturalnym z matematyki.

Informujemy, że w tomie I książki znalazły się rozdziały:

1. *Wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności algebraiczne.*
2. *Liczby rzeczywiste*
3. *Funkcje*
4. *Funkcja liniowa*
5. *Funkcja kwadratowa*
6. *Wielomiany*
7. *Funkcja wykładnicza*
8. *Funkcja logarytmiczna*
9. *Trygonometria*
10. *Ciągi*
11. *Poziom podstawowy - dodatek*
12. *Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania*

PRZYJĘTE W KSIĄŻCE OZNACZENIA

Oznaczenia w części teoretycznej:

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca na obu poziomach

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca tylko na poziomie rozszerzonym

Oznaczenia szczegółowych wymagań egzaminacyjnych:

(P) – wymaganie szczegółowe zawarte w podstawie programowej dla szkoły podstawowej

(A) – wymaganie szczegółowe dodane przez autora

wymaganie szczegółowe bez oznaczeń – wymaganie zawarte w podstawie programowej dla liceum / technikum

Wymagania szczegółowe odnoszące się do poziomu rozszerzonego wyróżnione zostały **wytłuszczoną czcionką w kolorze czerwonym**.

Oznaczenia przy zadaniach:

W – do zadania podano wskazówkę

R – do zadania podano rozwiązanie

* – zadanie o podwyższonej skali trudności

Zadania i podpunkty zadań przeznaczonych dla zdających matematykę także na poziomie rozszerzonym wyróżnione zostały **kolorem czerwonym**.

NIEKTÓRE SYMBOLE (OZNACZENIA) MATEMATYCZNE

Symbol (oznaczenie)	Czytamy
$x \in A$	element x należy do zbioru A
$x \notin A$	element x nie należy do zbioru A
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \setminus B$	różnica zbiorów A i B
$(a; b)$	przedział otwarty o końcach a i b
$[a; b]$ lub $\langle a; b \rangle$	przedział domknięty o końcach a i b
$f: A \to B$	funkcja f ze zbioru A w zbiór B (*czyli funkcja, której dziedziną jest zbiór A, a wartości należą do zbioru B*)

2. GEOMETRIA ANALITYCZNA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

U W A G A. W poniższych wzorach przyjmujemy, że $A=(x_A,\ y_A)$ i $B=(x_B,\ y_B)$.

WEKTORY

- Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,\ y_B-y_A]$.
- Równość wektorów $\vec{v}=[v_X,\ v_Y]$ i $\vec{u}=[u_X, u_Y]$: $\vec{v}=\vec{u}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_X=u_X$ i $v_Y=u_Y$.
- Długość wektora $\vec{v}=[v_X,\ v_Y]$: $|\vec{v}|=\sqrt{v_X^2+v_Y^2}$.

ODCINEK

- Długość odcinka AB: $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Współrzędne środka $S=(x_S, y_S)$ odcinka AB: $x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_S=\frac{y_A+y_B}{2}$.

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DANE PUNKTY A ORAZ B

- Jeżeli $x_B\neq x_A$, to prosta przechodząca przez punkty A i B określona jest wzorem $y-y_A=a(x-x_A)$, gdzie $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

RÓWNANIE KIERUNKOWE PROSTEJ: $y=ax+b$

- Jeśli prosta $y=ax+b$ jest nachylona do osi OX pod kątem α, to $\mathrm{tg}\,\alpha=a$.
- Proste o równaniach $y=ax+b$ i $y=cx+d$ są równoległe wtedy i tylko, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, czyli wtedy, gdy $a=c$.
- Proste o równaniach $y=ax+b$ i $y=cx+d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych równy jest -1, czyli wtedy, gdy $c=-\frac{1}{a}$.

POSTAĆ OGÓLNA RÓWNANIA PROSTEJ: $Ax+By+C=0$

- Jeżeli $B\neq 0$, to równanie $Ax+By+C=0$ można sprowadzić do postaci kierunkowej.

  Np. aby sprowadzić równanie $3x+5y-10=0$ do postaci kierunkowej, przenosimy (*zmieniając znak*) składniki $\mathbf{3x}$ oraz $\mathbf{-10}$ na drugą stronę równania: $5y=\mathbf{-3x+10}$, a następnie obie strony otrzymanego równania dzielimy przez 5: $y=-\frac{3}{5}x+2$.

- Każdą prostą można opisać za pomocą równania ogólnego, w szczególności równanie $x+C=0$ jest równaniem prostej równoległej do osi OY.

  Np. prosta o równaniu $x+5=0$, czyli prosta o równaniu $x=-5$, jest równoległa do osi OY i przecina oś OX w punkcie o współrzędnych $(-5, 0)$.

- Proste o równaniach $A_1x+B_1y+C_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2=0$ są równoległe, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$, zatem dla dowolnego $D\in\mathbf{R}$ prosta $Ax+By+D=0$ jest równoległa do prostej $Ax+By+C=0$.
- Proste o równaniach $A_1x+B_1y+C_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2=0$ są prostopadłe, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$, zatem dla dowolnego $D\in\mathbf{R}$ prosta $Bx-Ay+D=0$ (*i prosta* $-Bx+Ay+D=0$) jest prostopadła do prostej $Ax+By+C=0$.

PROSTA PROSTOPADŁA DO WEKTORA

- Dla dowolnego $C\in\mathbf{R}$ prosta $Ax+By+C=0$ jest prostopadła do wektora $\vec{w}=[A, B]$.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

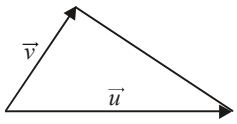
⇨ Odległość d punktu $P=(x_P, y_P)$ od prostej $Ax+By+C=0$ wyraża się wzorem $d=\frac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

RÓWNANIE OKRĘGU

⇨ Równanie okręgu o środku $O=(a, b)$ i promieniu r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

POLE TRÓJKĄTA

⇨ $P=\frac{1}{2}\cdot|v_X u_Y - v_Y u_X|$.



ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Uczeń	• posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci ogólnej • znajduje punkty wspólne prostej i okręgu

Powyższe wymagania szczegółowe z *podstawy programowej* dla **poziomu podstawowego** na maturze zdawanej w latach 2023 i 2024 **obowiązują tylko na poziomie rozszerzonym**.

Uczeń	• **dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie** • **stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej** • **znajduje punkty wspólne dwóch okręgów**

Powyższe wymagania szczegółowe z *podstawy programowej* dla **poziomu rozszerzonego nie obowiązują** na maturze zdawanej w latach 2023, 2024.

Maturzysta	• **posługuje się równaniem ogólnym prostej** • rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje

2.1 Dane równanie prostej sprowadź do postaci ogólnej i (o ile to możliwe) do postaci kierunkowej

a) $4x=2y+5$; **b)** $12y=72$; **c)** $7x=8$.

2.2 Równanie $y=0{,}25x-1{,}5$ zapisz w postaci $Ax+By+C=0$ tak, aby

a) R współczynnik A był równy 3, **b) R** współczynnik B był równy 2, **c)** współczynnik C był równy -6.

2.3 Ustal, czy dane równania opisują parę prostych równoległych lub prostopadłych.

a) R $y=5x+4$ i $y=0{,}2x+4$; **b)** $y=-7x-1$ i $y=-7x+1$; **c)** $y=-0{,}25x$ i $y=4x+1$

d) R $y=-0{,}25$ i $y=4$ **e)** $y=4$ i $x=-2$; **f) R** $y=(1-\sqrt{2})x$ i $y=(1+\sqrt{2})x$.

g) $2x-5y+1=0$ i $4x-10y+3=0$;

h) $2x-5y+1=0$ i $5x+2y+3=0$.

2.4 R Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostych o równaniach

a) $y=2x+4$ i $y=-x+7$; **b)** $y=4x-3$ i $y=4x+2$;

c) $x=-2$ i $y=-5$; **d)** $4x+2y-1=0$ i $12x=3-6y$;

Maturzysta	• posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci kierunkowej i **ogólnej**, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej)

2.5 R Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeżeli
a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$; **b)** $A = (-1, -4)$, $B = (1, 2)$; **c)** $A = (-4, 2)$, $B = (1, 2)$;
d) $A = (1, -4)$, $B = (1, 2)$.

2.6 W Zbadaj, czy punkty A, B, C są współliniowe, jeśli
a) $A = (-4, -6)$, $B = (-1, 2)$, $C = (5, 6)$; **b)** $A = (-5, -2)$, $B = (2, -1)$, $C = (8, 0)$.

2.7 R Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$, jeżeli prosta k określona jest równaniem
a) $y = 3x - 5$; **b)** $y = -2$; **c)** $x = -2$; **d)** $2x + 3y + 7 = 0$.

2.8 R Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$, jeżeli prosta k określona jest równaniem
a) $y = 3x - 5$; **b)** $y = -2$; **c)** $x = -2$; **d)** $2x + 3y + 7 = 0$;

2.9 Wyznacz równanie prostej nachylonej do osi Ox pod kątem o mierze α i przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$, jeżeli
a) R $\alpha = 60°$; **b)** $\alpha = 45°$; **c)** $\alpha = 135°$.

Maturzysta	• oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych

2.10 Oblicz długość odcinka AB, jeżeli
a) R $A = (-3, 4)$ i $B = (0, 0)$; **b)** $A = (-2, -1)$ i $B = (10, 4)$.

Maturzysta	• oblicza odległość punktu od prostej

2.11 R Oblicz odległość punktu $A = (-2, -1)$ od prostej o równaniu
a) $y = -0{,}5x + 3$; **b)** $y = 4$.

2.12 W Punkty $A = (1, -2)$, $B = (4, 1)$, $C = (3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.

Maturzysta	• znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek (**P**)

2.13 R Dane są punkty $A = (1, 3)$ i $B = (3, 7)$.
a) Oblicz współrzędne środka odcinka AB.
b) Wyznacz współrzędne takiego punktu K, aby punkt B był środkiem odcinka AK.
c) Znajdź równanie symetralnej odcinka AB.

2.14 W Punkt $A = (-1, 5)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, którego środkowe przecinają się w punkcie $S = (7, 12)$. Wyznacz współrzędne środka boku BC.

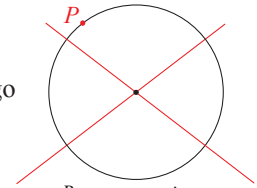
221. **(0 – 6)** Odcinek AB o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$. Symetralna odcinka AB przecina oś Oy w punkcie $P=(0, 6)$. Oblicz współrzędne końców odcinka AB.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2014

OKRĄG, KOŁO

222. Punkty $A=(3, 2)$ i $B=(6, -5)$ są końcami średnicy koła k.
a) Oblicz pole koła k.
b) Znajdź równanie stycznej do koła k w punkcie A.

223. **R** Dany jest punkt $A=(0, 3)$ oraz okrąg o środku w punkcie $S=(1, \frac{3}{2})$ i średnicy o długości $\sqrt{13}$.
a) Uzasadnij, że prosta o równaniu $y=\frac{7}{4}x-\frac{1}{4}$ zawiera średnicę danego okręgu.
b) Uzasadnij, że punkt A należy do danego okręgu.

224. Proste o równaniach $y=2x+5$ i $y=x+3$ zawierają średnice okręgu o, do którego należy punkt $P=(3, 2)$. Znajdź równanie okręgu o.



Rys. pomocniczy

225. **(0 – 4)** Punkty $A=(2, 0)$ i $B=(4, 2)$ leżą na okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y-3)^2=10$. Wyznacz na tym okręgu taki punkt C, aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2013

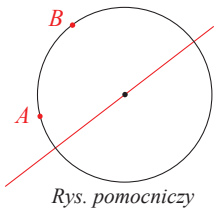
226. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ względem prostej o równaniu $x-y-3=0$.

227. **(0 – 4)** Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2+y^2=2^{11-n}$, $n\geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k\geq 1$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2018

228. **(0 – 4)** Prosta przechodząca przez punkty $A=(8, -6)$ i $B=(5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O=(0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB.
CKE, matura (II. termin) – poziom rozszerzony, lipiec 2020

229. **R** Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A=(1, 5)$, $B=(8, -2)$ i $C=(9, 1)$.

230. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A=(3, 0)$ i $B=(0, 1)$ należy do prostej $y=x+2$. Znajdź równanie tego okręgu.

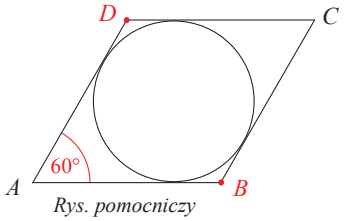


Rys. pomocniczy

288. **(0 – 6)** Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 82,5. Przekątna BD tego rombu zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwień 2020

289. Punkty $B = (0, 0)$ i $D = (4, 2)$ są wierzchołkami kątów rozwartych rombu $ABCD$. Wyznacz równanie okręgu wpisanego w ten romb wiedząc, że kąt ostry rombu ma miarę 60°.

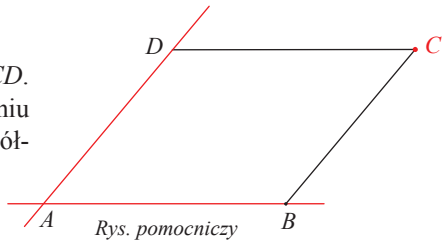


Rys. pomocniczy

290.* **R** Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 8$ opisano romb o polu $33\frac{1}{3}$. Dłuższa przekątna rombu zawiera się w prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne wierzchołków kątów ostrych tego rombu.

inne równoległoboki

291. Punkt $C = (11, 20)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Prosta o równaniu $y = x - 3$ zawiera bok AB, a prosta o równaniu $y = -3x + 9$ zawiera bok AD tego równoległoboku. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku $ABCD$.



Rys. pomocniczy

292. **(0 – 4)** Punkty $A = (-1, -5)$, $B = (3, -1)$ i $C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

CKE, matura – poziom podstawowy, sierpień 2013

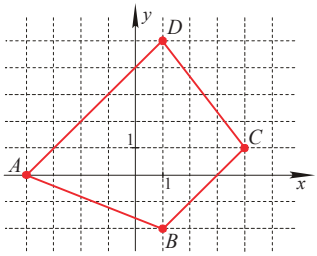
TRAPEZY

293. Czworokąt $ABCD$ pokazany jest na rysunku.

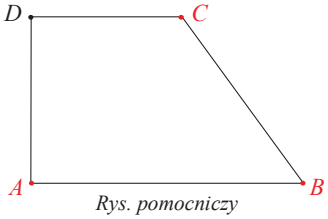
a) Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

b) Znajdź równania prostych zawierających przekątne tego czworokąta.

c) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



294. Dane są punkty $A = (1, 1)$, $B = (9, 5)$, $C = (5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu D wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym, którego kąt przy wierzchołku A jest prosty.



Rys. pomocniczy

295. Oblicz pole czworokąta ograniczonego prostymi o równaniach: $y = 2x - 2$, $y = -\frac{4}{3}x + 10$, $y = 0$, $y = 2$.

Egzamin wstępny do szkół średnich w woj. jeleniogórskim w roku 1993

296. **(0 – 5)** Punkty $A = (-5, 5)$, $C = (8, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Prosta o równaniu $y = 2x$ jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D oraz pole tego trapezu.

CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2011

❹ Otrzymamy wówczas funkcję $V(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot 2(3-a)$, gdzie $a\in(0;3)$.

Wzór funkcji V zapiszmy w postaci: $V(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2-a^3)$.

❺ Wyznaczamy pochodną funkcji V: $V'(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}(6a-3a^2)$. Miejsca zerowe pochodnej: $a_1=0\notin(0;3)$, $a_2=2$.

$V'(a)>0$ dla $a\in(0;2)$ i $V'(a)<0$ dla $a\in(2;3)$, więc funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0;2]$ i malejąca w $[2;3)$. Wobec tego w punkcie $a=2$ funkcja V przyjmuje największą wartość.

❻ Objętość wybranego graniastosłupa: $V(2)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3\cdot 2^2-2^3)=2\sqrt{3}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

6.1 **a)** 24; **b)** 720; **c)** 9; **d)** 990; **e)** 56; **f)** 70; **g)** 870.

Rozwiązanie. **c)** $\frac{9!}{8!}=\frac{8!\cdot 9}{8!}=9$. **d)** $\frac{11!}{8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{8!}=990$. **e)** $\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot 5!}=56$. **f)** $\frac{(7!)^2}{9!}=\frac{7!\cdot 7!}{9!}=\frac{7!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{7!\cdot 8\cdot 9}=70$.

g) $\frac{31!-30!}{29!+28!}=\frac{30!\cdot(31-1)}{28!(29+1)}=29\cdot 30=870$.

6.2 **a)** $(n+1)(n+2)$; **b)** $n(n+2)$; **c)** $4n^2(2n-2)!$.

Rozwiązanie. **a)** $\frac{(n+2)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n!}=(n+1)(n+2)$. **b)** $\frac{n!+(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot n+(n-1)!\cdot n(n+1)}{(n-1)!}=\frac{(n-1)!\cdot[n+n(n+1)]}{(n-1)!}=n^2+2n$.

c) $(2n)!+(2n-1)!+(2n-2)!=(2n-2)!\cdot(2n-1)\cdot 2n+(2n-2)!\cdot(2n-1)+(2n-2)!=(2n-2)!\cdot[(2n-1)\cdot 2n+2n-1+1]=(2n-2)!\cdot 4n^2$.

6.3 **a)** 35; **b)** 190; **c)** 17; **d)** 1; **e)** 1.

Rozwiązanie. **a)** $\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{6\cdot 4!}=35$.

6.4 **a)** $n=5$; **b)** $n=2$; **c)** $n=6$; **d)** $n\in\{2,3,4,5,6\}$; **e)** $n\in\{2,3,4,5\}$.

Rozwiązanie. **a)** Założenia: $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 2$. $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=\frac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{2\cdot(n-2)!}=\frac{(n-1)n}{2}$.

Rozwiązaniami równania kwadratowego $\frac{(n-1)n}{2}=10$ są liczby 5 i -4. Uwzględniając założenia, stwierdzamy, że $n=5$.

b) Założenia: $n\in\mathbf{N}$. $\binom{n+6}{2}=\frac{(n+6)!}{2!\cdot(n+4)!}=\frac{(n+4)!\cdot(n+5)(n+6)}{2\cdot(n+4)!}=\frac{(n+5)(n+6)}{2}$.

Rozwiązaniami równania kwadratowego $\frac{(n+5)(n+6)}{2}=28$ są liczby 2 i -13. Uwzględniając założenia, stwierdzamy, że $n=2$.

c) Założenia: $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 3$. $\binom{n}{3}=\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=\frac{(n-3)!\cdot(n-2)(n-1)n}{6\cdot(n-3)!}=\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$. Równanie $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=20$ sprowadzamy do postaci $n^3-3n^2+2n-120=0$. Jednym z rozwiązań równania $n^3-3n^2+2n-120=0$ jest liczba $n=6$, zatem równanie to możemy zapisać w postaci $(n-6)(n^2+3n+20)=0$. Trójmian $n^2+3n+20$ nie ma pierwiastków, więc jedynym rozwiązaniem równania $n^3-3n^2+2n-120=0$ jest 6.

d) Założenia: $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 2$. Z **a)** mamy $\binom{n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$. Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $\frac{(n-1)n}{2}<21$ jest przedział $(-6;7)$.

Wiemy, że $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 2$, więc daną nierówność spełniają liczby 2, 3, 4, 5, 6.

e) Założenia: $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 2$. Liczba $\binom{n}{2}$ jest dodatnia, więc możemy obie strony danej nierówności pomnożyć przez liczbę $3\cdot\binom{n}{2}$, otrzymując nierówność $3\cdot\binom{5}{2}>2\cdot\binom{n}{2}$. $\binom{5}{2}=10$ i z **a)** mamy $\binom{n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$. Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $30>(n-1)n$ jest przedział $(-5;6)$. Wiemy, że $n\in\mathbf{N}$ i $n\geq 2$, zatem szukanymi liczbami są 2, 3, 4, 5.

6.5 **a)** $30\cdot 26$ $(=780)$; **b)** $10\cdot 18$ $(=180)$; **c)** $10\cdot 8+20\cdot 18$ $(=440)$.

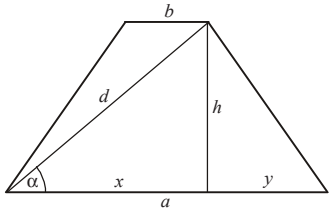
Rozwiązanie. Liczbę par obliczymy stosując *regułę mnożenia*, a w punkcie **c)** także *regułę dodawania*.

a) W klasie IVA jest **30** uczniów, a w klasie IVB 26 uczniów, więc wyboru pary można dokonać na $\mathbf{30}\cdot 26$ sposobów.

b) W klasie IVA jest **10** dziewcząt, a w klasie IVB 18, więc wyboru pary można dokonać na $\mathbf{10}\cdot 18$ sposobów.

c) Parę, w której jest maturzystka z IVA i maturzysta z IVB można utworzyć na $\mathbf{10}\cdot 8$, a parę w której jest maturzysta z IVA i maturzystka z IVB utworzyć można na $\mathbf{20}\cdot 18$. Zatem wszystkich par składających się z dziewczyny i chłopaka jest $\mathbf{10}\cdot 8+\mathbf{20}\cdot 18$.

106. $0{,}5d^2\sin 2\alpha$.



Rozwiązanie. $\frac{h}{d}=\sin\alpha$, stąd $h=d\sin\alpha$. $\frac{x}{d}=\cos\alpha$, stąd $x=d\cos\alpha$.

$y=\frac{a-b}{2}$, $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$. Pole trapezu: $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=xh=d^2\sin\alpha\cos\alpha$.

107. 3 cm i 5 cm.

Wskazówka. Wysokość trapezu poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których jeden ma długość równą długości odcinka łączącego środki ramion trapezu.

109. Promień okręgu wpisanego: $\frac{3}{2}$. Promień okręgu opisanego: $\frac{10}{3}$.

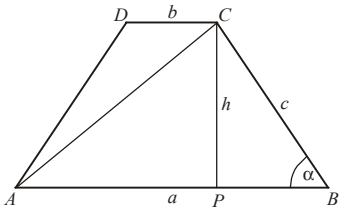
110. 2 : 1.

Wskazówka. **I SPOSÓB.** Wyznacz stosunek pól trójkątów ABK i DCK, gdzie K jest punktem wspólnym prostych AD i BC.

II SPOSÓB. Uzasadnij, że trójkąt ABC i „połówka" trójkąta ACD są trójkątami podobnymi.

111. Pole: $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2, długość przekątnej: $3\sqrt{3}$ cm.

112. $\sqrt{2}-1$.



Rozwiązanie. Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc jest równoramienny.

$\frac{a+b+2c}{a+b}=1+\frac{2c}{a+b}=1{,}5$, stąd $a+b=4c$. $|AP|=\frac{a+b}{2}=2c$.

AB jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc ABC jest trójkątem prostokątnym i $|\angle ACP|=\alpha$. $\frac{h}{c}=\sin\alpha$, $\frac{|AP|}{h}=\frac{2c}{h}=\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, zatem $\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Przekształcając ostatnią równość, otrzymujemy $\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$. Otrzymane równanie rozwiązujemy wprowadzając niewiadomą pomocniczą $t=\cos\alpha$: $t^2+2t-1=0$, $t_1=-1-\sqrt{2}$, $t_1=-1+\sqrt{2}$. Kosinus kąta ostrego jest dodatni, więc $\cos\alpha=-1+\sqrt{2}$.

113.

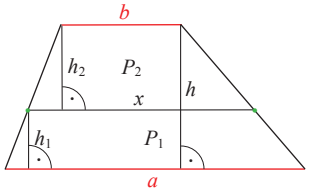
Wskazówka. Skala podobieństwa trójkątów $A'BO$ i ABD jest równa skali podobieństwa trójkątów $AB'O$ i ABC.

115.

Wskazówka. Niech K będzie punktem wspólnym prostych zawierających ramiona AD i BC trapezu. Poprowadź z wierzchołka K środkowe trójkątów ABK i DCK.

116.

Rozwiązanie. Niech P będzie polem danego trapezu; pozostałe oznaczenia, jak na rysunku obok.



Wobec powyższego: $P=\frac{1}{2}(a+b)h$, $P_1=\frac{1}{2}(a+x)h_1$, $P_2=\frac{1}{2}(x+b)h_2$ i $h=h_1+h_2$.

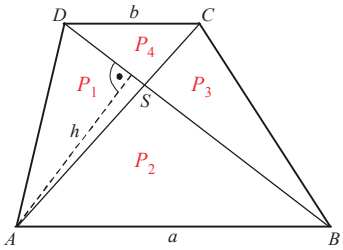
$P_1=P_2$, zatem ❶ $(a+x)h_1=(x+b)h_2$. $P_1+P_2=P$, więc $\frac{1}{2}(a+x)h_1+\frac{1}{2}(x+b)h_2=\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)$.

Stąd otrzymujemy ❷ $(x-b)h_1=(a-x)h_2$.

Po podzieleniu stronami równości ❶ i ❷ dostaniemy równość $\frac{a+x}{x-b}=\frac{x+b}{a-x}$.

Stąd otrzymujemy $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

117.



Rozwiązanie. P_1, P_2, P_3, P_4 – pola trójkątów odpowiednio DAS, ABS, SBC, DSC.

a) $P_{ABC}=P_2+P_3$, $P_{ABD}=P_2+P_1$. $P_{ABC}=P_{ABD}$ (*pola trójkątów ABC i ABD są równe ponieważ mają wspólny bok, a wysokości obu trójkątów poprowadzone do tego boku mają równą długość*). Z równości $P_2+P_3=P_2+P_1$ otrzymujemy równość $P_3=P_1$.

b) Trójkąty ABS i CDS są podobne (*kąty ABS i CDS są kątami odpowiadającymi, kąty ASB i CSD są kątami wierzchołkowymi*), więc stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Skala podobieństwa trójkątów ABS i CDS jest równa $a:b$, zatem $P_2:P_4=a^2:b^2$.